Exercice 1 :

Fait en classe.

Exercice 2 :

Fait en classe.

Exercice 3 :

Baccalauréat S - Polynésie - septembre 2008 – Exercice 4 **6 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x})$

La courbe (C) représentative de la fonction f dans un repère orthogonal est donnée en annexe.

Partie A - Étude de fonction f.

1. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = x + \ln(1 + 2e^{-2x})$.
   On admet que, pour tout réel x, $f(x) = -x + \ln(2 + e^{2x})$.
2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d) d'équation $y = x$ est asymptote à (C).
   Étudier la position relative de (C) et de (d).
3. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d') d'équation $y = -x + \ln 2$ est asymptote à (C).
4. Étudier les variations de la fonction f.
   Montrer que le minimum de la fonction f est égal à $\frac{3}{2}\ln 2$.
5. Tracer les droites (d) et (d') sur la feuille annexe.

SOLUTION

A.1. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = x + \ln\left(1 + 2e^{-2x}\right)$.
On admet que, pour tout réel x, $f(x) = -x + \ln\left(2 + e^{2x}\right)$.

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}\ \ f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x})$

$$\begin{aligned} &= \ln\left(e^x(1 + 2e^{-2x})\right) \\ &= \ln(e^x) + \ln(1 + 2e^{-2x}) \\ &= x + \ln(1 + 2e^{-2x}) \end{aligned}$$

Montrons aussi la seconde relation :

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}\ \ f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x})$

$$\begin{aligned} &= \ln\left(e^{-x}(e^{2x} + 2)\right) \\ &= \ln(e^{-x}) + \ln(e^{2x} + 2) \\ &= -x + \ln(e^{2x} + 2) \end{aligned}$$

2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d) d'équation $y = x$ est asymptote à (C).
Étudier la position relative de (C) et de (d).

Pour calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ on va utiliser la première relation :

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}\ \ f(x) = x + \ln(1 + 2e^{-2x})$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} -2x &= -\infty \\ \lim_{X \to -\infty} e^X &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{array}{c} \text{par composition} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0 \end{array}$$

Ainsi $\left.\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} 1 + e^{-2x} &= 1 \\ \lim_{X \to 1} \ln(X) &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{array}{c} \text{par composition} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + 2e^{-2x}) = 0 \end{array}$

On a donc $\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+2e^{-2x})=0\end{array}\right\}\begin{array}{c}\text{par somme}\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\end{array}$

Pour montrer que la droite $(d): y=x$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$ il faut calculer :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x$$

On a $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)-x=\ln(1+2e^{-2x})$.

Or on a prouvé que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+2e^{-2x})=0$ cela prouve que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=0$ ce qui prouve que la droite $(d): y=x$ est bien asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

Pour étudier la position relative de (C) par rapport à $(d): y=x$ il faut étudier le signe de $f(x)-x$:

$\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)-x=\ln(1+2e^{-2x})$. Résolvons l'inéquation $\ln(1+2e^{-2x})>0$

$$\Leftrightarrow \ln(1+2e^{-2x})>\ln 1$$
$$\Leftrightarrow 1+2e^{-2x}>1$$
$$\Leftrightarrow 2e^{-2x}>0 \text{ ce qui est toujours vrai.}$$

On a donc prouvé que $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)-x>0 \Leftrightarrow f(x)>x$ ainsi (C) est au-dessus de (d) sur $\mathbb{R}$.

3. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d') d'équation $y=-x+\ln 2$ est asymptote à (C).

Pour calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ on va utiliser la seconde relation de la question 1. :

On sait que $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)=-x+\ln(2+e^{2x})$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to-\infty} 2x=-\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X}=0\end{array}\right\}\begin{array}{c}\text{par composition}\\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}=0\end{array}$$

Ainsi $\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to-\infty} 2+e^{2x}=2 \\ \lim\limits_{X\to 2} \ln(X)=\ln 2\end{array}\right\}\begin{array}{c}\text{par composition}\\ \lim\limits_{x\to-\infty} \ln(2+e^{2x})=\ln 2\end{array}$

On a donc $\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to-\infty} -x=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \ln(2+e^{2x})=\ln 2\end{array}\right\}\begin{array}{c}\text{par somme}\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty\end{array}$

Pour montrer que la droite $(d'): y=-x+\ln 2$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$ il faut calculer :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-(-x+\ln 2)$$

On a $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)=-x+\ln(2+e^{2x})$ donc $f(x)-(-x+\ln 2)=-\ln 2+\ln(2+e^{2x})$

Or on a prouvé que $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(2+e^{2x})=\ln 2$ cela prouve que $\lim\limits_{x\to+\infty} -\ln 2+\ln(2+e^{2x})=0$ soit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(-x+\ln 2)=0$ ce qui prouve que la droite $(d'): y=-x+\ln 2$ est bien asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.

Pour étudier la position relative de (C) par rapport à $(d'): y=-x+\ln 2$ il faut étudier le signe de $f(x)-(-x+\ln 2)$:

$\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)-(-x+\ln 2)=-\ln 2+\ln(2+e^{2x})$.

Résolvons l'inéquation $-\ln 2+\ln(2+e^{2x})>0$

$$\Leftrightarrow \ln(2+e^{2x})>\ln 2$$
$$\Leftrightarrow 2+e^{2x}>2$$
$$\Leftrightarrow e^{2x}>0 \text{ ce qui est toujours vrai.}$$

On a donc prouvé que $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)-(-x+\ln 2)>0 \Leftrightarrow f(x)>-x+\ln 2$ ainsi (C) est au-dessus de (d') sur $\mathbb{R}$.

4. Étudier les variations de la fonction f.

Montrer que le minimum de la fonction f est égal à $\frac{3}{2}\ln 2$.

On rappelle que $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)=\ln(e^{x}+2e^{-x})$

<u>Montrons que f est dérivable sur $\mathbb{R}$</u> :

La fonction $x\mapsto -x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme) donc d'après le cours la fonction $x\mapsto e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus la fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (cours) donc par somme la fonction $x \mapsto e^x + 2e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

D'autre part $\forall x \in \mathbb{R}\ \ e^x + 2e^{-x} > 0$ donc d'après le cours la fonction $x \mapsto \ln(e^x + 2e^{-x})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a donc prouvé que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

<u>Calcul de la dérivée de f</u> :

$\forall x \in \mathbb{R}\ \ f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x})$. On a une forme du type $\ln u$ donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \ f'(x) = \frac{e^x - 2e^{-x}}{e^x + 2e^{-x}}$$

<u>Etudions le signe de f'</u> :

Résolvons l'inéquation $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{e^x - 2e^{-x}}{e^x + 2e^{-x}} > 0$

$\Leftrightarrow e^x - 2e^{-x} > 0$ car $e^x + 2e^{-x} > 0$

$\Leftrightarrow e^x > 2e^{-x}$

$\Leftrightarrow e^x \times e^x > 2$

$\Leftrightarrow e^{2x} > 2$

$\Leftrightarrow e^{2x} > e^{\ln 2}$

$\Leftrightarrow 2x > \ln 2 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}\ln 2$

Conclusion : $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]\frac{1}{2}\ln 2\,;+\infty\right[$ donc f est croissante sur $\left]\frac{1}{2}\ln 2\,;+\infty\right[$

On en déduit que $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty;\frac{1}{2}\ln 2\right[$ donc f est décroissante sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\ln 2\right[$

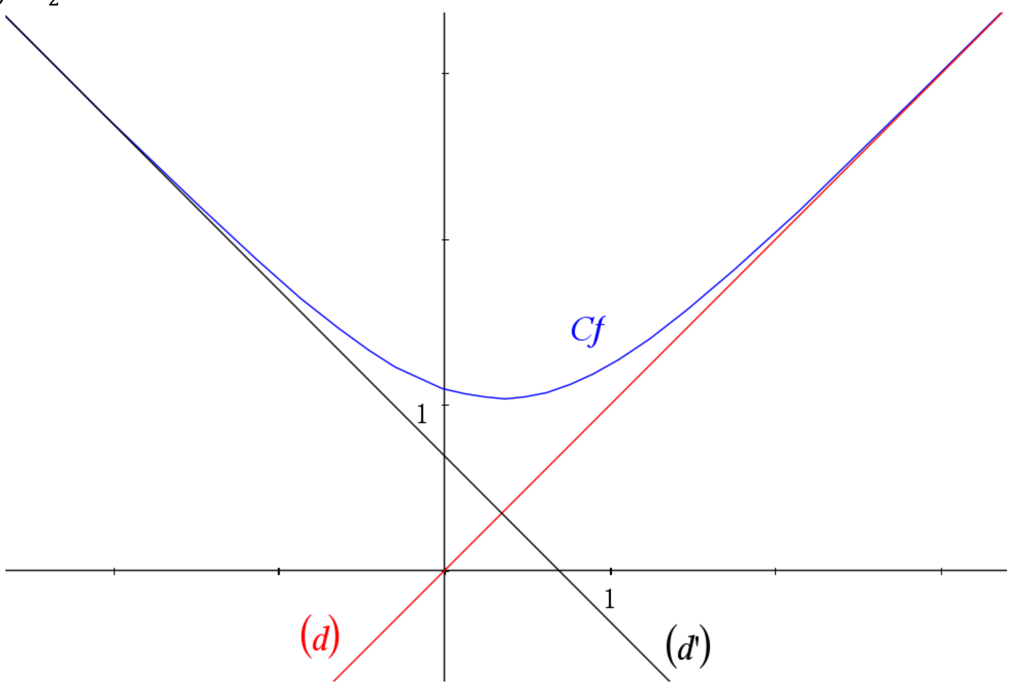
On a le tableau de variation suivant de la fonction f :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{2}\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Pour calculer $f\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)$ on va utiliser la seconde expression de $f(x)$ du 1.

Ainsi $f\left(\frac{1}{2}\ln(2)\right) = -\frac{1}{2}\ln(2) + \ln\left(e^{\ln(2)} + 2\right) = -\frac{1}{2}\ln(2) + \ln(2+2) = -\frac{1}{2}\ln(2) + \ln(4) = -\frac{1}{2}\ln(2) + 2\ln(2)$

Donc $f\left(\frac{1}{2}\ln(2)\right) = \frac{3}{2}\ln(2)$



Exercice 4 :

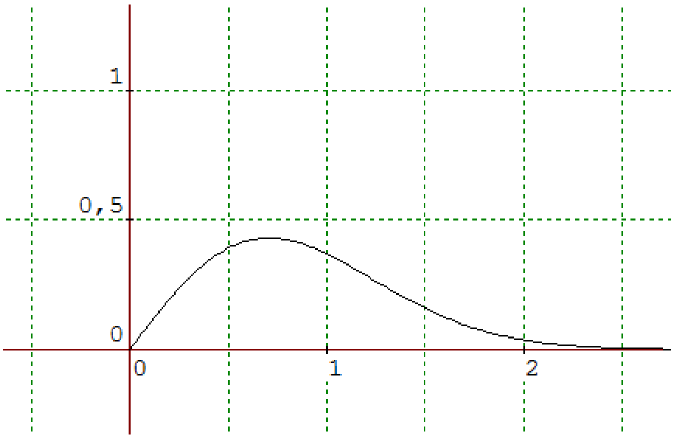
Baccalauréat S - Pondichéry – avril 2009 – Exercice 1 (début) **7 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par

$f(x) = xe^{-x^2}$

On désigne par C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan.

Cette courbe est représentée ci-contre.



Partie A

1°) a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

On pourra écrire, pour x différent de 0 :

$$f(x) = \frac{1}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$$

b) Démontrer que f admet un maximum en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et calculer ce maximum.

A. 1°) a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Pour tout $x \in]0;+\infty[$ $f(x) = \frac{1}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$.

Déterminons $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = 0\ (cours) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{par composition} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2} = 0^+ \end{array}$$

on e, déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

A. 1°) b) Démontrer que f admet un maximum en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et calculer ce maximum.

La fonction $x \mapsto -x^2$ est dérivable sur $[0;+\infty[$ car c'est une fonction polynôme.

Donc d'après le cours la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est dérivable sur $[0;+\infty[$

La fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $[0;+\infty[$ car c'est une fonction polynôme.

f est le produit de fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$, donc f est dérivable sur $[0;+\infty[$.

Pour tout $x \in [0;+\infty[$

$$f'(x) = 1 \times e^{-x^2} + x(-2x)e^{-x^2} = e^{-x^2}(1-2x^2)$$

Or pour tout $x \in [0;+\infty[$ $e^{-x^2} > 0$,

donc $f'(x)$ est du signe de $1-2x^2$ qui est un polynôme du second degré dont les racines sont $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

On en déduit donc que f est croissante sur $\left[0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ et f est décroissante sur $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2e}}{2}$	$\searrow$	0

On a $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2e}}{2}$

Conclusion : f admet un maximum en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et il vaut $\frac{\sqrt{2e}}{2}$

Exercice 5 :

Soit f et g les fonctions définies sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x) = xe^{-x}$ et $g(x) = x^2e^{-x}$

On note C_f et C_g les représentations graphiques des fonctions f et g dans le plan muni d'un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Partie A

La courbe représentative C_f de la fonction f dans un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$est donnée en annexe (à rendre avec la copie).

1°) D'après le graphique, quelles semblent être les variations de la fonction f et sa limite en $+\infty$?

f semble croissante sur $[0;1]$ et décroissante sur $[0;+\infty[$.

On lit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2°) Valider ces conjectures à l'aide d'une démonstration.

La fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $[0;+\infty[$ (polynôme) et la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est dérivable sur $[0;+\infty[$ (cours).

Ainsi par produit, f est dérivable sur $[0;+\infty[$.

$\forall x \in [0;+\infty[\ f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-1)e^{-x} = e^{-x}(1-x)$.

On sait que $\forall x \in [0;+\infty[\ e^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1-x$.

Ainsi $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in [0;1[$; $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]1;+\infty[$ et $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

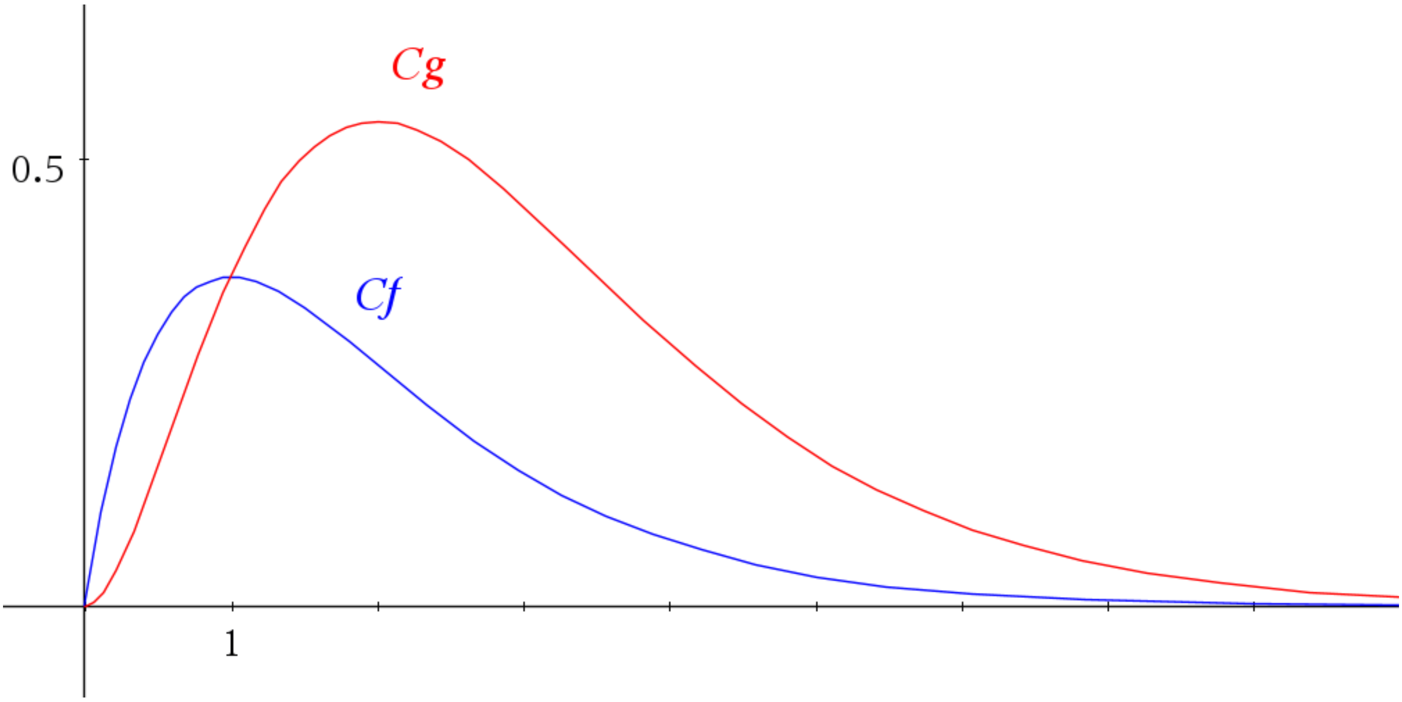
f est croissante sur $[0;1[$, f est décroissante sur $]1;+\infty[$ ce qui confirme notre conjecture.

On a aussi $\forall x \in [0;+\infty[\ f(x) = \frac{x}{e^x}$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty\ (cours) \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{1}{X} = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{c} par\ composition \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \end{array}$$

. Ce qui confirme notre conjecture.

3°) Tracer sur l'annexe jointe (à rendre avec la copie) la courbe C_g représentative de la fonction g.



4°) Quelle semble être la position relative de la courbe C_f par rapport à la courbe C_g ?
Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

On peut conjecturer que C_f est au-dessus de C_g sur $[0;1]$ et C_f est au-dessous de C_g sur $[1;+\infty[$.

Démonstration : Soit $x \in \mathbb{R}_+$, étudions le signe de $f(x) - g(x)$:

$\forall x \in \mathbb{R}_+\ f(x) - g(x) = xe^{-x} - x^2e^{-x} = xe^{-x}(1-x)$. On sait que $x \geq 0$ et $e^{-x} > 0$ donc $f(x) - g(x)$ est du signe de $1-x$ ce qui valide notre conjecture.