Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x+2-\frac{4\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+3}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$.

   b. Démontrer que la droite $\mathscr{D}_1$ d'équation $y = x+2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

   c. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}_1$.

2. **a.** On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ et montrer que, pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = \left(\frac{\mathrm{e}^x-3}{\mathrm{e}^x+3}\right)^2$$

   b. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de la fonction f.

3. **a.** Que peut-on dire de la tangente $\mathscr{D}_2$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point I d'abscisse $\ln 3$?

   b. En utilisant les variations de la fonction f, étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}_2$.

4. Etudier la convexité de la fonction f.

5. Soit D_3 la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0. Etudier la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à D_3.

Exercice 2 :

Soit f une fonction définie pour tout nombre réel x par

$$f(x) = (1+x)\mathrm{e}^{-x}.$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

1. **a.** Étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

   b. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
   Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

   c. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   Calculer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$.
   En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(e^{x} + 2e^{-x}\right).$$

La courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f dans un repère orthogonal est donnée en annexe.

Partie A - Étude de fonction f.

1. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = x + \ln\left(1 + 2e^{-2x}\right)$.
   On admet que, pour tout réel x, $f(x) = -x + \ln\left(2 + e^{2x}\right)$.
2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d) d'équation $y = x$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.
   Étudier la position relative de $(\mathscr{C})$ et de (d).
3. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d′) d'équation $y = -x + \ln 2$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.
4. Étudier les variations de la fonction f.

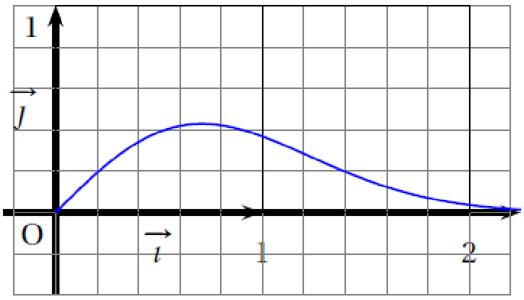
   Montrer que le minimum de la fonction f est égal à $\dfrac{3}{2}\ln 2$.

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = xe^{-x^2}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan. Cette courbe est représentée ci-contre.



Partie A

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

   (On pourra écrire, pour x différent de 0 : $f(x) = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{x^2}{e^{x^2}}$).

   b. Démontrer que f admet un maximum en $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et calculer ce maximum.

Exercice 5 :

Soient f et g les fonctions définies sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

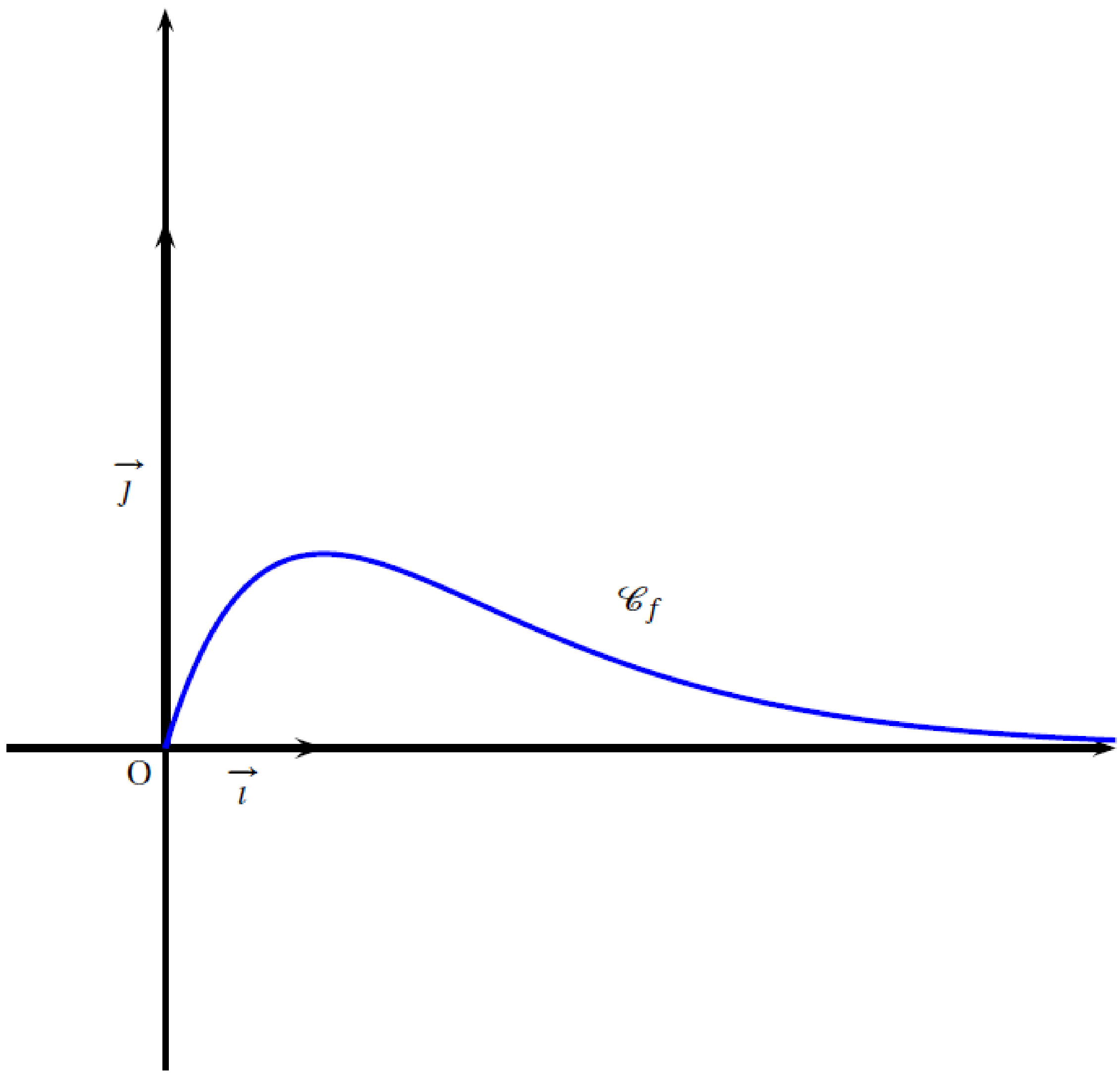
$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions f et g dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ est donnée en annexe (à rendre avec la copie).

1. D'après le graphique, quelles semblent être les variations de la fonction f et sa limite en $+\infty$?
2. Valider ces conjectures à l'aide d'une démonstration.
3. Tracer sur l'annexe jointe (à rendre avec la copie) la courbe $\mathscr{C}_g$ représentative de la fonction g.
4. Quelle semble être la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la courbe $\mathscr{C}_g$?
   Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

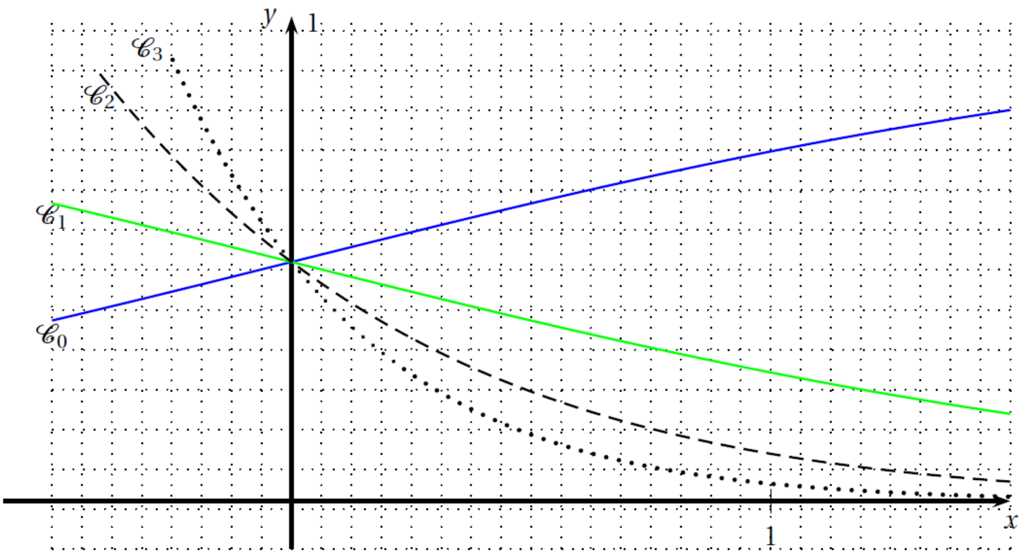


Exercice 6 :

Soit n un entier naturel.
On note f_n, la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ sont représentées ci-dessous :



Partie A : *Quelques propriétés des fonctions f_n et des courbes $\mathscr{C}_n$*

1. Démontrer que pour tout entier naturel n les courbes $\mathscr{C}_n$ ont un point A en commun. On préciser ses coordonnées.

2. Étude de la fonction f_0

- **a.** Étudier le sens de variation de f_0.
- **b.** Préciser les limites de la fonction f_0 en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement ces limites.
- **c.** Dresser le tableau de variation de fonction f_0 sur $\mathbb{R}$.

3. Étude de la fonction f_1

- **a.** Démontrer que $f_0(x) = f_1(-x)$ pour tout nombre réel x.
- **b.** En déduire les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et $+\infty$, ainsi que son sens de variation.
- **c.** Donner une interprétation géométrique de 3. a. pour les courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$.

4. Étude de la fonction f_n pour $n \geqslant 2$

- **a.** Vérifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ et pour tout nombre réel x, on a :

$$f_n(x) = \frac{1}{e^{nx} + e^{(n-1)x}}.$$

- **b.** Étudier les limites de la fonction f_n en $-\infty$ et en $+\infty$.
- **c.** Calculer la dérivée $f_n'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$.