Exercice 1 :

Corrigé en classe.

Exercice 2 :

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

1°) On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x - \ln(1+x)$.
a) En étudiant les variation de la fonction f, montrer que, $\forall x \in [0;+\infty[\ \ln(1+x) \leq x$.

Montrons que f est dérivable sur $[0;+\infty[$.

La fonction $x \mapsto 1+x$ est dérivable sur $[0;+\infty[$ (polynôme) de plus elle est positive stricte donc d'après le cours la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $[0;+\infty[$.
De plus la fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $[0;+\infty[$ (polynôme) donc par somme f est dérivable sur $[0;+\infty[$.
Calcul de $f'(x)$.

$\forall x \in [0;+\infty[$ par $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$.
Etude du signe de $f'(x)$.

Or $\forall x \in [0;+\infty[\ x \geq 0$ et $1+x > 0$ donc $f'(x) \geq 0$.

Variation de $f'(x)$.

f est donc croissante sur $[0;+\infty[$. En particulier $\forall x \in [0;+\infty[\ f(x) \geq f(0)$.
Or $f(0) = 0 - \ln(1+0) = 0$ donc $\forall x \in [0;+\infty[\ f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x - \ln(1+x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) \leq x$.

1°) b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \ln(u_n) \leq 1$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \ln(u_n) = \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$
Or $\frac{1}{n} > 0$ donc d'après la question précédente $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq 1$ car $n > 0$
Ce qui prouve que $\ln(u_n) \leq 1$.

1°) c) La suite (u_n) peut-elle avoir pour limite $+\infty$?

On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, ainsi on a :

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{par composition} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = +\infty\end{array}$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}\ \ln(u_n) \leq 1$ ce qui est contradictoire avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = +\infty$.

Ainsi la suite (u_n) ne peut pas avoir pour limite $+\infty$.

2°) On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $v_n = \ln(u_n)$
a) On pose $x = \frac{1}{n}$. Exprimer v_n en fonction de x.

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*\ v_n = \ln(u_n) = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{x}\ln(1+x)$ avec $x = \frac{1}{n}$.

2°) b) Que vaut $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$? Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

D'après le cours $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$. On en déduit :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0\\ \lim\limits_{X\to 0}\frac{\ln(1+X)}{X}=1\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{par composition}\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=1\end{array}$$

. Ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$ soit $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=1$

2°) c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

On sait que $\forall n\in\mathbb{N}^*\ v_n=\ln(u_n)\Leftrightarrow u_n=e^{v_n}$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=1\\ \lim\limits_{X\to 1} e^X=e\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{par composition}\\ \lim\limits_{n\to+\infty} e^{v_n}=e\end{array}$$

. Ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{v_n}=e$ soit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=e$

Exercice 3 :

On considère l'équation notée (E) : $\ln x=-x$.

Le but de l'exercice est de prouver que l'équation (E), admet une solution unique notée α appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et d'utiliser une suite convergente pour en obtenir un encadrement.

Partie A : existence et unicité de la solution

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x)=x+\ln x.$$

1. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
2. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
3. Vérifier que : $\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant 1$.

Partie A : Fait en classe.

Partie B : encadrement de la solution α

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=\frac{4x-ln\,(x)}{5}$.

1°) Etude de quelques propriétés de la fonction g.

a) Etudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

La fonction $x\mapsto\frac{4}{5}x$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ (polynôme) et la fonction $x\mapsto-\frac{1}{5}\ln(x)$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ (cours) donc par somme g est dérivable sur $]0;+\infty[$.

$\forall x\in\,]0;+\infty[\ \ g'(x)=\frac{4}{5}-\frac{1}{5}\times\frac{1}{x}=\frac{1}{5}\left(4-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{5}\times\frac{4x-1}{x}$. Ainsi $g'(x)$ est du signe de $4x-1$

$g'(x)>0\Leftrightarrow x\in\left]\frac{1}{4};+\infty\right[$ et $g'(x)<0\Leftrightarrow x\in\left]0;\frac{1}{4}\right[$ on a aussi $g'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$.

g est croissante sur $\left]\frac{1}{4};+\infty\right[$ puis g est décroissante sur $\left]0;\frac{1}{4}\right[$.

1°) b) En déduire que $\forall x \in \left[\frac{1}{2};1\right]$ on a $g(x) \in \left[\frac{1}{2};1\right]$.

On sait que g est croissante sur $\left]\frac{1}{4};+\infty\right[$ donc $\forall x \in \left[\frac{1}{2};1\right]$ $g\left(\frac{1}{2}\right) \leq g(x) \leq g(1)$.
Calculons $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{5}\left(4 \times \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{5}(2+\ln(2)) \approx 0{,}54$ donc $g\left(\frac{1}{2}\right) \geq \frac{1}{2}$
De pls $g(1) = \frac{1}{5}(4 \times 1 - \ln(1)) = \frac{4}{5}$ donc $g(1) \leq 1$.
Ce qui nous donne $\forall x \in \left[\frac{1}{2};1\right]$ $\frac{1}{2} \leq g\left(\frac{1}{2}\right) \leq g(x) \leq g(1) \leq 1$ donc $g(x) \in \left[\frac{1}{2};1\right]$.

c. Démontrer qu'un nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ est solution de l'équation (E) si et seulement si $g(x) = x$.

1°) c) Démontrer que si $x \in]0;+\infty[$ est solution de $(E) \Leftrightarrow g(x) = x$

Soit $x \in]0;+\infty[$.
x est solution de $g(x) = x \Leftrightarrow \frac{4x-\ln(x)}{5} = x \Leftrightarrow 4x - \ln(x) = 5x \Leftrightarrow \ln(x) = -x \Leftrightarrow x$ solution de (E)

2°) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = g(u_n)$.

a) En utilisant le sens de variation de lafonction g, démontrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$$

<u>Montrons que la proposition est vraie ai rang 0</u> :
On a $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = g(1) = \frac{4}{5}$ on a donc bien $\frac{1}{2} \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$. La proposition est vraie au rang 0.
<u>Hérédité</u> :
Supposons que la propositio soit vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ c'est-à-dire : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$
et montrons qu'elle reste vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire : $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$
On sait d'après l'hypothèse de récurrence que : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$
Or g est croissante sur $\left]\frac{1}{4};+\infty\right[$ donc : $g\left(\frac{1}{2}\right) \leq g(u_n) \leq g(u_{n+1}) \leq g(1)$
De plus $g\left(\frac{1}{2}\right) \geq \frac{1}{2}$ et $g(1) \leq 1$ donc : $\frac{1}{2} \leq g(u_n) \leq g(u_{n+1}) \leq 1$.
Or $u_{n+1} = g(u_n)$ et $u_{n+2} = g(u_{n+1})$ ce qui nous donne bien : $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$
La proposition est vraie au rang $n+1$.
Conclusion : La proposition est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, elle donc donc vraie $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$$

2°) b) En déduire que la suite (u_n) converge vers α.

D'après 2.a la suite (u_n) est croissante et majorée donc d'après le théorème de convergence monotone (u_n) converge vers $l \in \left[\frac{1}{2};1\right]$.
De plus g est continue sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = g(u_n)$ et $u_n \in \left[\frac{1}{2};1\right]$ donc l vérifie $g(l) = l$.
On a vu que $g(l) = l \Leftrightarrow l = \alpha$ d'après 1.c.
Conclusion : La suite (u_n) converge vers α ?

3°) Recherche d'une valeur approchée de α.
a) A l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_{10}, arrondie à la sixième décimale.

On trouve $u_{10} \approx 0{,}567123$

3°) b) On admet que u_{10} est une valeur approchée par défaut à 5×10^{-4} près de α.
En déduire un encadrement de α sous la forme $u \leq \alpha \leq v$ où u et v sont deux décimaux écrits avec trois décimales.

On sait que $|u_{10} - \alpha| \leq 5 \times 10^{-4}$. De plus $\forall n \in \mathbb{N}$ si $n \geq 10$ alors $u_n \geq u_{10}$ car (u_n) est croissante.
Par passage à la limite on obtient $\alpha \geq u_{10}$ donc $u_{10} - \alpha \leq 0$.
Ainsi $|u_{10} - \alpha| = \alpha - u_{10}$ d'où $0 \leq \alpha - u_{10} \leq 5 \times 10^{-4}$ donc $u_{10} \leq \alpha \leq u_{10} + 5 \times 10^{-4}$
D'autre part à l'aide de la calculatrice on trouve On trouve $u_{10} \approx 0{,}56712$
Ce qui nous donne $0{,}5671 \leq u_{10} \leq \alpha \leq u_{10} + 5 \times 10^{-4} \leq 0{,}56713 + 0{,}0005$
Soit $0{,}5671 \leq \alpha \leq 0{,}56763$ donc $0{,}567 \leq \alpha \leq 0{,}568$.

Exercice 4 :

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
On considère les points $A(1;\ -1;\ 4), B(7; -1; -2)$ et $C(1; 5; -2)$.

1°) a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

1°) b) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

On a $AB = \sqrt{6^2 + 0^2 + (-6)^2} = 6\sqrt{2}$
Et $AC = \sqrt{0^2 + 6^2 + (-6)^2} = 6\sqrt{2}$
Enfin $BC = \sqrt{(-6)^2 + 6^2 + 0^2} = 6\sqrt{2}$.
Ains $AB = AC = BC$ le triangle ABC est équilatéral.

1°) c) Montrer que le vecteur $\vec{n}(1; 1; 1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Montrons que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires :

Cherchons s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = 0 \times k \\ 0 = 6k \\ -6 = -6k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = 0 \\ 0 = k \\ 1 = k \end{cases}$ impossible.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Montrons que $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ et $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$:

On a $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 1 \times 6 + 1 \times 0 + 1 \times (-6) = 6 - 6 = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$.
De plus $\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 1 \times 0 + 1 \times 6 + 1 \times (-6) = 6 - 6 = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$.

Conclusion : $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) donc $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan (ABC).

1°) d) En déduire que $x + y + z - 4 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

$M\left|\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right. \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$
$\Leftrightarrow (x - 1) \times 1 + (y + 1) \times 1 + (z - 4) \times 1 = 0$
$\Leftrightarrow x - 1 + y + 1 + z - 4 = 0$
Donc $(ABC): x + y + z - 4 = 0$.

2°) Soit (d) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -2t \\ y = -2t - 2 \\ z = -2t - 3 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que la droite (d) est perpendiculaire au plan (ABC).

L'équation paramétrique de la droite (d) nous donne un vecteur directeur de (d) : $\vec{u}\left|\begin{matrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{matrix}\right.$. On remarque que $\vec{u} = -2\vec{n}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires ce qui prouve que $(d) \perp (ABC)$.

2°) b) Monter que les coordonnées du point G, intersection de la droite (d) et du plan (ABC) sont $(3; 1; 0)$.

$$G\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix} \in (ABC) \in (d) \cap (ABC) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = -2t - 2 \\ z = -2t - 3 \\ x + y + z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = -2t - 2 \\ z = -2t - 3 \\ -2t - 2t - 2 - 2t - 3 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = -2t - 2 \\ z = -2t - 3 \\ -6t = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) \\ y = -2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) - 2 \\ z = -2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) - 3 \\ t = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 - 2 = 1 \\ z = 3 - 3 = 0 \\ t = -\frac{3}{2} \end{cases} \text{ ce qui nous donne } G\begin{vmatrix}3\\1\\0\end{vmatrix}$$

2°) c) Monter que G est l'isobarycentre des points A, B et C.

On rappelle que G est l'isobarycentre de A, B et $C \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

On a $\overrightarrow{GA}\begin{vmatrix}-2\\-2\\4\end{vmatrix}$; $\overrightarrow{GB}\begin{vmatrix}4\\-2\\-2\end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{GC}\begin{vmatrix}-2\\4\\-2\end{vmatrix}$ ainsi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\begin{vmatrix}-2+4-2\\-2-2+4\\4-2-2\end{vmatrix}$ soit $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix}$

Ce qui prouve bien que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. G est bien l'isobarycentre de A, B et C.

3°) Soit (S) la sphère de centre G passant par A.
a) Donner une équation cartésienne de la sphère (S).

$M\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix} \in (S) \Leftrightarrow GM = GA$. Commençons par calculer GA :

On sait que $\overrightarrow{GA}\begin{vmatrix}-2\\-2\\4\end{vmatrix}$ donc $GA = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 4 + 16} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

$$M\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix} \in (S) \Leftrightarrow GM^2 = GA^2$$

$$\Leftrightarrow (S) : (x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 24$$

3°) b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection Eet F, de la droite (d) et de la sphère (S).

$$M\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix} \in (S) \cap (d) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = -2t - 2 \\ z = -2t - 3 \\ (x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 24 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = -2t - 2 \\ z = -2t - 3 \\ (-2t-3)^2 + (-2t-2-1)^2 + (-2t-3)^2 = 24 \end{cases}$$

Résolvons $(-2t-3)^2 + (-2t-2-1)^2 + (-2t-3)^2 = 24$:

$\Leftrightarrow (4t^2 + 12t + 9) \times 3 = 24$

$\Leftrightarrow 4t^2 + 12t + 9 = 8 \Leftrightarrow 4t^2 + 12t + 1 = 0$. Calculons le discriminant de ce polynôme du secon degré : $\Delta = 12^2 - 4 \times 4 \times 1 = 144 - 16 = 128 = 2^7$. $\Delta > 0$ l'équation admet deux solutions réelles : $t_1 = \frac{-12-8\sqrt{2}}{8} = -\frac{3}{2} - \sqrt{2}$ et $t_2 = -\frac{3}{2} + \sqrt{2}$.

Donc $E\begin{vmatrix}-2t_1\\-2t_1-2\\-2t_1-3\end{vmatrix}$ et $F\begin{vmatrix}-2t_2\\-2t_2-2\\-2t_2-3\end{vmatrix}$ soit $E\begin{vmatrix}3+2\sqrt{2}\\1+2\sqrt{2}\\2\sqrt{2}\end{vmatrix}$ et $F\begin{vmatrix}3-2\sqrt{2}\\1-2\sqrt{2}\\-2\sqrt{2}\end{vmatrix}$