Exercice 1 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) + \frac{1}{3}x.$$

La courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal est donnée en annexe.
Cette annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

   b. Montrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$. Tracer (D).

   c. Étudier la position relative de (D) et de $(\mathscr{C})$.

   d. Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \ln(\mathrm{e}^x + 1) - \frac{2}{3}x$.

   e. En déduire la limite de f en $-\infty$.

2. **a.** On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   Montrer que pour tout x réel, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 2}{3(\mathrm{e}^x + 1)}$.

   b. En déduire les variations de la fonction f.

Partie C

Dans cette partie, on cherche à mettre en évidence une propriété de la courbe $(\mathscr{C})$.
On note (T) la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.

1. Calculer le coefficient directeur de (T) puis construire (T) sur le graphique.
2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Soient M et N deux points de la courbe $(\mathscr{C})$ d'abscisses non nulles et opposées. Montrer que la droite (MN) est parallèle à la droite (T).

Exercice 2 :

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

1. On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln(1+x).$$

a. En étudiant les variations de la fonction f, montrer que, pour tout réel x positif ou nul, $\ln(1+x) \leqslant x$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(u_n) \leqslant 1$.

c. La suite (u_n) peut-elle avoir pour limite $+\infty$?

2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $v_n = \ln(u_n)$.

a. On pose $x = \dfrac{1}{n}$. Exprimer v_n en fonction de x.

b. Que vaut $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$? Aucune justification n'est demandée.
Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} v_n$.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3 :

On considère l'équation notée (E) : $\ln x = -x$.

Le but de l'exercice est de prouver que l'équation (E), admet une solution unique notée α appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et d'utiliser une suite convergente pour en obtenir un encadrement.

Partie A : existence et unicité de la solution

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x + \ln x.$$

1. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
3. Vérifier que : $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Partie B : encadrement de la solution α

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{4x - \ln x}{5}$.

1. Étude de quelques propriétés de la fonction g.
   - **a.** Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   - **b.** En déduire que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$, $g(x)$ appartient à cet intervalle.
   - **c.** Démontrer qu'un nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ est solution de l'équation (E) si et seulement si $g(x) = x$.
2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = g(u_n)$.
   - **a.** En utilisant le sens de variation de la fonction g, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
   - **b.** En déduire que la suite (u_n) converge vers α.
3. Recherche d'une valeur approchée de α
   - **a.** À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_{10}, arrondie à la sixième décimale.
   - **b.** On admet que u_{10} est une valeur approchée par défaut à 5×10^{-4} près de α.

     En déduire un encadrement de α sous la forme $u \leqslant \alpha \leqslant v$ où u et v sont deux décimaux écrits avec trois décimales.

Exercice 4 :

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points A(1 ; −1 ; 4), B(7 ; −1 ; −2) et C(1 ; 5 ; −2).

1. **a.** Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
   b. Montrer que le triangle ABC est équilatéral.
   c. Montrer que le vecteur $\vec{n}$ (1 ; 1 ; 1) est un vecteur normal au plan (ABC).
   d. En déduire que $x+y+z-4=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Soit $\mathscr{D}$ la droite de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & -2t \\ y & = & -2t-2 \quad \text{où} \quad t \in \mathbb{R}. \\ z & = & -2t-3 \end{array}\right.$$

   a. Montrer que la droite $\mathscr{D}$ est perpendiculaire au plan (ABC).
   b. Montrer que les coordonnées du point G, intersection de la droite $\mathscr{D}$ et du plan (ABC) sont (3 ; 1 ; 0).
   c. Montrer que G est l'isobarycentre des points A, B et C.
3. Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre G passant par A.
   a. Donner une équation cartésienne de la sphère $\mathscr{S}$.

   b. Déterminer les coordonnées des points d'intersection E et F, de la droite $\mathscr{D}$ et de la sphère $\mathscr{S}$.